

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA  
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. FAVINI

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ASTRATTE DEGENERI  
E SINGOLARI

14 GENNAIO 1982.

A.FAVINI

Equazioni differenziali astratte degeneri e  
singolari

Vorrei esporre alcuni risultati che ho ottenuto relativamente ad alcuni tipi di equazioni astratte di tipo singolare o degeneri facendo uso delle tecniche di Da Prato e Grisvard.

Siano  $X, Y$  due spazi di Banach complessi e siano  $B, A_0, A_1$  operatori lineari chiusi, i cui domini vengono denotati con  $D(B), D(A_0), D(A_1)$ , rispettivamente.

$B$  opera da  $X$  in sé mentre  $A_0, A_1$  vanno che  $Y$  in  $X$ .

Considero l'equazione

$$BA_1u + A_0u = h \quad (1)$$

dove  $h \in X$  e la incognita  $u \in D(P, B) = D(A_0) \cap D(BA_1)$ .

Posto  $P(\lambda) = \lambda A_1 + A_0$ , assumerò che  $D(A_0) \subset D(A_1)$  e che  $A_0$  ha inverso limitato. Ciò assicura la invertibilità di  $P(\lambda)$  in un intorno di 0.

Si assume anche che  $D(A_0)$  è denso in  $Y$ .

ASSUNZIONI

I Lo spettro di  $B$  è contenuto in  $S_{a, \theta} = \{z: |\arg z| < \theta, |z| > a\}$   $\theta < \pi$  e  $a > 0$ .

Lo spettro di  $P(\lambda) = \{\lambda: P(\lambda) \text{ non ha inverso} \in L(X, Y)\}$  giace all'esterno del settore

$$S_\theta = \{z: |\arg z| < \theta, |z| > 0\}$$

si pone  $\Gamma_{a, \theta} = \partial S_{a, \theta}$ .

II Per ogni  $\lambda \notin S_{a,\theta}$ ,  $\|(B-\lambda)^{-1}\|_{L(X)} \leq C(1+|\lambda|)^{-1}$

III Per ogni  $\lambda \notin S_\theta$ ,  $\|P(\lambda)^{-1}\|_{L(X,Y)} \leq C(1+|\lambda|)^h$ ,

$$\|A_0 P(\lambda)^{-1}\|_{L(X)} \leq C(1+|\lambda|)^m,$$

dove  $h, m$  sono interi,  $h > -1, m > 0$ .

IV Per ogni  $\lambda$  in un intorno di  $\Gamma_{a,\theta}$  risulta

$$\|(B-\lambda)^{-1} [B; A_0 P(\lambda)^{-1}] x\|_{D(B^k)} \leq C(1+|\lambda|)^\alpha \|x\|_X,$$

dove  $x \in D_B$ ,  $k$  è un intero  $> 0$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

V Per ogni  $\lambda$  in un intorno di  $\Gamma_{a,\theta}$  risulta

$$\|[B; A_0 P(\lambda)^{-1}] (B-\lambda)^{-1}\|_{L(X, D(B^k))} \leq C(1+|\lambda|)^\beta,$$

dove  $k$  è un intero  $> 0$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Non si assume che  $B$  commuti con  $A_0, A_1$ .

Vale il seguente risultato di unicità, che estende una affermazione di P.Grisvard concernente il problema regolare, con  $A_1=1$ .

**Teorema 1:** Valgano I-II-IV e la seconda di III. Se la  $k$  di IV soddisfa  $k > \max \{m, \alpha\}$  e la costante  $C$  della stessa IV è sufficientemente piccola, allora (1) ha al massimo una soluzione.

Il seguente esempio chiarisce la necessità della ipotesi IV.

Esempio 1: Si consideri

$$\frac{d}{dt}(ty)(t) = -tx(t) + y(t) + f(t), \quad t \in (0, T)$$

$$\dot{y}(t) = -x(t) + g(t),$$

$$y(0) = 0$$

E' banale vedere che il problema ha soluzione se  $f(t)=tg(t)$  e



allora  $x(t)=g(t)-y'(t)$ , con  $y(0)=0$ . Per esempio,

$x(t)=g(t)$ ,  $y(t)=0$  oppure  $x(t)=g(t)-1$ ,  $y(t)=t$ .

Si ha:  $(\lambda A_1 + A_0)^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda t \\ -1 & t \end{bmatrix}$  e così  $h=m=1$ . D'altra parte  
 $[B; A_0 (\lambda A_1 + A_0)^{-1}] = \int_0^\lambda \begin{bmatrix} -2\lambda t \\ -\lambda \end{bmatrix}$  ma chiaramente non si può trovare  $k > 1$  che soddisfa IV.

La dimostrazione del Teorema 1 parte dalla considerazione dello integrale

$$V = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_{a,\theta}} \lambda^{-k} (B-\lambda)^{-1} P(\lambda)^{-1} d\lambda$$

Se  $u$  soddisfa (1) con  $h \neq 0$ , allora  $A_0 u = w$  soddisfa  $A_1 A_0^{-1} B w + w = 0$ .

D'ora in poi denotiamo  $A_1 A_0^{-1}$  con  $T$ .

Si vede allora che  $0 = B^{-k} w + W w$

dove  $W$  è connesso alla ipotesi IV, nel senso che questo consente di dedurre la limitatezza di  $W$  da  $X$  a  $D(B^k)$ .

Essendo  $B$  un isomorfismo tra questi spazi, il risultato segue.

Riguardo il problema dell'esistenza, si ha

**Teorema 2:** Se valgono I.II.III e V, la  $k$  di V soddisfa  $k > \max \{h, m, \beta\}$  e  $C$  è sufficientemente piccola, allora (1) ha almeno una soluzione, data da

$$(2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_{a,\theta}} \lambda^{-k} P(\lambda)^{-1} (B-\lambda)^{-1} B^k f d\lambda, \quad (2)$$

dove  $f$  è un elemento conveniente di  $D(B^k)$ , per ogni  $h \in D(B^k)$ .

Un semplice esempio:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (x+ty)(t) &= x(t) + f(t), & 0 < t < T, \\ 0 &= -x(t) - ty(t) + g(t), \\ x(t) + ty(t) &= 0. \end{aligned}$$

Si ha  $h=m=1$ . Inoltre, poiché

$$A_0 (\lambda A_1 + A_0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

si ha  $\beta=-1, k=2$ . Di qui, esistenza ed unicità. Risulta

$$x(t) = g(t) - t(g'(t) - f(t)), \quad y(t) = g(t) - f(t), \quad g(0) = 0.$$

I risultati forniscono quindi una estensione di DUBINSKII.

Per quanto concerne (1) negli spazi d'interpolazione, ricordo che se  $B$  è un operatore positivo in un Banach  $X$  e  $k$  è un intero non negativo,  $\frac{k}{k+1} < \theta < 1$ , allora

$$(X, D(B^{k+1}))_{\theta, p} = \left\{ a \in X: \| t^{\theta(k+1)-k} [B(B+t)^{-1}] B^k a \|_{L_p^*(X)} < \infty \right\}$$

e quindi  $(X, D(B^{k+1}))_{\frac{\theta+k}{k+1}, p}$  coincide con l'insieme degli  $a \in D(B^k)$  per cui  $B^k a \in (A, D(B))_{\theta, p}$ ,  $0 < \theta < 1$ .

Il risultato seguente estende allora quello di Da Prato e Grisvard a questa situazione.

IV

Teorema 3: Se valgono I.II.III.V (con  $k=0$ ),  $p>1$  e risulta

$$\left\| [B; A_0 P(\lambda)^{-1}] (B-\lambda)^{-1} x \right\|_{(X, D(B^{k+1}))_{\frac{k+\theta}{k+1}, p}} \leq C(1+|\lambda|)^{\gamma} \|x\|_{(X, D(B))_{\theta, p}}, \quad 0 < \theta < 1,$$



con  $k > \max \{1, m-1, \beta, \gamma\}$  e  $C$  abbastanza piccolo, allora (1) ha almeno una soluzione.

Osserviamo esplicitamente che II.III.V.VI sono condizioni sufficienti a dare senso ad integrali come (2).

A volte può essere più opportuno studiare direttamente lo stesso integrale su  $\Gamma_{a,\theta}$ .

Esempio. Siano  $A_0(t), A_1(t), t \in [0, T]$ , operatori lineari chiusi dal Banach  $F$  in uno spazio di Banach  $E$  e sia  $f \in L^p(0, T; E)$ ,  $p > 1$ .

Si dice che  $u$  è una soluzione stretta di

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_1(t)u(t) + A_0(t)u(t) &= f(t), \quad 0 < t < T, \\ \lim_{t \rightarrow 0} A_1(t)u(t) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

se  $u \in L^p(0, T; F)$ ,  $\frac{d}{dt} A_1(\cdot)u(\cdot) \in L^p(0, T; E)$  e vale (3).

Sia  $-A(t)$ ,  $0 < t < T$ , il generatore infinitesimale di un semigruppone analitico di operatori lineari nel Banach  $E$ , per cui esiste  $(A(t) + \lambda)^{-1}$  per ogni  $\lambda$ ,  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  e  $\|(A(t) + \lambda)^{-1}\|_{L(E)} \leq C(1 + |\lambda|)^{-1}$ ,  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ . Di qui, esistono  $M > 0$ ,  $\theta \in (\pi/2, \pi)$  tali che

$$\|(A(t) + \lambda)^{-1}\|_{L(E)} \leq M(1 + |\lambda|)^{-1}, \quad \lambda \in S_\theta.$$

Per semplicità assumiamo che  $D(A(t)) \equiv D$  è indipendente da  $t \in [0, T]$ . Assumiamo poi che per ogni  $u \in D$ ,  $A(t)u$  è fortemente differenziabile con continuità su  $[0, T]$  (vedi per es., il libro di TANABE). Segue che

$$\frac{\partial}{\partial t} (A(t) + \lambda)^{-1} = -(A(t) + \lambda)^{-1} A'(t) (A(t) + \lambda)^{-1} \quad \text{e} \quad \left\| \frac{\partial}{\partial t} (A(t) + \lambda)^{-1} \right\| \leq C(1 + |\lambda|)^{-1}$$

essendo  $\|A'(t)A(t)^{-1}\|_{L(E)} \leq \text{Cost.}$

Definiamo  $A_0, A_1$  ponendo

$$(A_0 u)(t) = A(t)u(t), \quad u \in L^P(0, T; D),$$

$$(A_1 u)(t) = tu(t), \quad u \in L^P(0, T; E).$$

$$\text{Risulta: } \|(\lambda t + A(t))^{-1}\| \leq C(1 + |\lambda|t)^{-1}, \quad \lambda \in S_\theta,$$

e così

$$\left\| \int_{\Gamma_\theta} \int_0^t e^{z(t-s)} (\lambda t + A(t))^{-1} f(s) ds d\lambda \right\| <$$

$$< \int_0^t \int_{\Gamma_\theta} \left| \frac{e^{\lambda(t-s)}}{|\lambda|t} \right| \|f(s)\| ds |d\lambda| \leq \frac{C}{t} \int_0^t \|f(s)\| ds.$$

Ma allora, applicando la disuguaglianza di Hardy abbiamo

$$Sf \|_{L^P(0, T; E)}^p \leq C \int_0^T t^{-p} \left[ \int_0^t \|f(s)\| ds \right]^p dt <$$

$$\leq C' \left\| \int_0^T \|f(t)\|^p dt \right\| = C' \|f\|_{L^p(0, T; E)}^p.$$

$$\text{dove } Sf = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_\theta} (\lambda A_1 + A_0)^{-1} (B - \lambda)^{-1} f d\lambda$$

Occorre ora stimare

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_\theta} \lambda^{-1} [B; A_0 (\lambda A_1 + A_0)^{-1}] (B - \lambda)^{-1} f d\lambda = \\ & = - \int_{\Gamma_\theta} [B; A_1 (\lambda A_1 + A_0)^{-1}] (B - \lambda)^{-1} f d\lambda. \end{aligned}$$

Poiché

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} t A(t)^{-1} (\lambda t A(t)^{-1} + 1)^{-1} = -\lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial t} (\lambda t A(t)^{-1} + 1)^{-1} = \\ & = -(\lambda t A(t)^{-1} + 1)^{-1} \frac{d}{dt} t A(t)^{-1} (\lambda t A(t)^{-1} + 1)^{-1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -A(t)(\lambda t + A(t))^{-1}(\lambda t + A(t))^{-1} + \lambda^{-1}A(t)(\lambda t + A(t))^{-1}(\lambda t + A(t) - A(t))A(t)^{-1} \\
&\quad \cdot A'(t)A(t)^{-1}A(t)(\lambda t + A(t))^{-1} = \\
&= -A(t)(\lambda t + A(t))^{-1}(\lambda t + A(t))^{-1} + \lambda^{-1}A'(t)A(t)^{-1}A(t)(\lambda t + A(t))^{-1} \\
&\quad - \lambda^{-1}A(t)(\lambda t + A(t))^{-1}A'(t)A(t)^{-1}A(t)(\lambda t + A(t))^{-1},
\end{aligned}$$

risulta

$$\begin{aligned}
&\| (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_\theta} [B; A_1(\lambda A_1 + A_0)^{-1}] (B - \lambda)^{-1} f d\lambda \|_{L^P(0, T; E)}^P \leq \\
&\leq C \int_0^T \left[ \int_{\Gamma_\theta} \int_0^t |e^{\lambda(t-s)}| \left\{ \|A(t)(\lambda t + A(t))^{-1}(\lambda t + A(t))^{-1} f(s)\| + \right. \right. \\
&\quad + |\lambda|^{-1} \|A'(t)A(t)^{-1}\| \|A(t)(\lambda t + A(t))^{-1}\| \|f(s)\| + \\
&\quad \left. + |\lambda|^{-1} \|A(t)(\lambda t + A(t))^{-1}\| \|A'(t)A(t)^{-1}\| \|A(t)(\lambda t + A(t))^{-1}\| \|f(s)\| \right. \\
&\quad \left. ds |d\lambda| \right]^P dt
\end{aligned}$$

Il secondo e terzo addendo non danno problemi. Quanto al primo,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left[ \int_{\Gamma_\theta} \int_0^t |e^{(t-s)}| \|A(t)(\lambda t + A(t))^{-1}\| \|(\lambda t + A(t))^{-1} f(s)\| ds |d\lambda| \right] dt \leq \\
&\leq C \int_0^T \left[ \int_{\Gamma_\theta} \int_0^t \frac{|e^{\lambda(t-s)}|}{|\lambda|t} \|f(s)\| ds |d\lambda| \right]^P dt \leq \\
&\leq C \int_0^T \frac{1}{t^p} \left[ \int_0^t \|f(s)\| ds \right]^P dt \leq C' \|f\|_{L^p(0, T; E)}^p.
\end{aligned}$$

Per applicare il Teorema 3 occorre però una stima negli spazi d'interpolazione. Ma



$$B [B; A_0 P(\lambda)^{-1}] (B-\lambda)^{-1} f =$$

$$= [B; [B; A_0 P(\lambda)^{-1}]] (B-\lambda)^{-1} f + [B; A_0 P(\lambda)^{-1}] (B-\lambda)^{-1} B f,$$

se  $f$  appartiene a  $D(B)$ .

L'integrale  $\int_0^\infty \lambda^{-1} [B; A_0 P(\lambda)^{-1}] (B-\lambda)^{-1} B f d\lambda$  è ben definito in

$L^p(0, T; E)$  in virtù di quanto visto prima. Dobbiamo aggiungere una ipotesi di regolarità in più su  $A(t)$  per stimare

$$[B; [B; A_0 P(\lambda)^{-1}]] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\lambda t A(t)^{-1} + 1)^{-1}$$

Se  $A(t)x$  è differenziabile due volte con continuità e

$$\|A''(t)A(t)^{-1}\| < \text{cost.}, \text{ risulta}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} A(t) (\lambda t + A(t))^{-1} = [1] + [2] + [3], \text{ dove}$$

$$[1] = -\lambda \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\lambda t A(t)^{-1} + 1)^{-1} \right] (t A(t)^{-1})' (\lambda t A(t)^{-1} + 1)^{-1},$$

$$[2] = -\lambda (\lambda t A(t)^{-1} + 1)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (t A(t)^{-1}) (\lambda t A(t)^{-1} + 1)^{-1},$$

$$[3] = -\lambda (\lambda t A(t)^{-1} + 1)^{-1} (t A(t)^{-1})' \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\lambda t A(t)^{-1} + 1)^{-1} \right].$$

$$\lambda^{-1} \cdot [1] = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\lambda t A(t)^{-1} + 1)^{-1} \right\} (\lambda t + A(t))^{-1} -$$

$$- \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\lambda t + A(t))^{-1} + 1 \right\} t A(t)^{-1} A'(t) A(t)^{-1}.$$

$$\cdot A(t) (\lambda t + A(t))^{-1} = [4] - [5]$$

$$[5] = \lambda (\lambda t A(t)^{-1} + 1)^{-1} \left\{ A(t)^{-1} t A(t)^{-1} A'(t) A(t)^{-1} \right\}$$

$$(\lambda t A(t)^{-1} + 1)^{-1} t A(t)^{-1} A'(t) A(t)^{-1} A(t) (\lambda t + A(t))^{-1} =$$

norma piccola (previo eventualmente un opportuno cambiamento della variabile  $u$ ). Si può così applicare il Teorema 3.

Esempio 3: Consideriamo il problema:

$$\frac{\partial}{\partial t} m(t,x)u(t,x) = -A(t,x,D)u(t,x) + f(t,x), 0 < t < T, x \in \Omega$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} m(t,x)u(t,x) = 0,$$

dove  $\Omega$  è un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$  sufficientemente regolare,  $m(t,x) \geq 0$  è una funzione di classe  $C^{(1)}$  su  $[0,T] \times \bar{\Omega}$ , tale che  $m(t,x) > 0$  su  $[0,T] \times \Omega$ .

Assumiamo che la degenerazione sia nella sola  $x$ , nel senso che risulti  $C_1 \alpha(x) < m(t,x) < C_2 \alpha(x)$ ,  $t \in [0,T]$ ,  $x \in \Omega$  e  $|\frac{\partial}{\partial t} m(t,x)| < C m(t,x)$ .  $A(t,x,D)$  viene considerata come un operatore invertibile  $A_0(t)$  da  $H^{2m}(\Omega) \rightarrow H_0^{2m}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ .

$$\text{Posto } \lambda m(t,x) v(t,x) + A(t,x) v(t,x) = g(t,x),$$

assumiamo, per semplicità, (vedi, per es., Sobolevskii, per una trattazione più generale), che

$$\operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Omega} A(t,x,D) v(t,x) \bar{v}(t,x) dx dt \geq$$

$$\geq \|v\|_{L^2(0,T;H^m(\Omega))}^2 + C \|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2,$$

in modo che si possa dedurre

$$\operatorname{Re} \lambda \int_0^T \int_{\Omega} m(t,x) |v(t,x)|^2 dx dt + \|v\|_{L^2(0,T;H^m(\Omega))}^2 + C \|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq$$

$$\leq \operatorname{Re} \int_0^T \int_{\Omega} f(t,x) \bar{v}(t,x) dx dt.$$

Le  $\beta(x) > 0$  su  $\Omega$ , è misurabile, denotiamo con  $L^2_{\beta}$  l'insieme di tutte le  $u$  misurabili da  $\Omega$  a  $\mathbb{C}$  tali che

$$\int_{\Omega} \beta(x)^2 |u(x)|^2 dx < \infty.$$

Deduciamo allora facilmente che per  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$

$$(\operatorname{Re} \lambda + \alpha_0) \|v\|_{L^2(0,T;L^2_{\sqrt{\alpha}})} \leq C \|f\|_{L^2(0,T;L^2_{1/\sqrt{\alpha}})}.$$

Analogamente,

$$|\operatorname{Im} \lambda| \|v\|_{L^2(0,T;L^2_{\sqrt{\alpha}})} \leq C \|f\|_{L^2(0,T;L^2_{1/\sqrt{\alpha}})}.$$

$$\text{Poniamo } L^2(0,T;L^2_{\sqrt{\alpha}}) = V, \quad L^2(0,T;L^2_{1/\sqrt{\alpha}}) = V', \quad H =$$

$$= L^2(0,T;L^2(\Omega)). \quad \text{Allora } V' \overset{\text{CHC}}{\hookrightarrow} V \text{ densamente.}$$

Assumiamo così  $D(A_0) = L^2(0,T;D)$  dove  $D = \{u \in H^{2m}(\Omega) \cap \bigcap_0^m H^m_0(\Omega), A_0(t) u \in L^2_{1/\sqrt{\alpha}} \forall t \in [0,T]\}$  (si noti che  $A_0(t)u = A_0(t)A_0(t)^{-1} A_0(t)u$ ).  $D(A_1) = L^2(0,T;L^2_{\sqrt{\alpha}})$ . Segue che  $A_1$  risulta un isomorfismo da  $V$  su  $V'$ .

In base a risultati ben noti in  $L^2$  ed alle immersioni che abbiamo ricordato, si ha

$$\|(\lambda A_1 + A_0)^{-1} f\|_V \leq C(1+|\lambda|)^{-1} \|f\|_{V'},$$

e quindi

$$\|A_0 P(\lambda)^{-1} f\|_{V'} \leq C \|f\|_{V'}.$$

Si tratta ora di stimare la norma di  $[B; A_0 P(\lambda)^{-1}]$  nello spazio  $V^1$ . A tal fine, si osservi che

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_0(t) (\lambda A_1(t) + A_0(t))^{-1} &= -\lambda (\lambda T(t) + 1)^{-1} \left\{ \frac{d}{dt} A_1(t) A_0(t)^{-1} \right\} \cdot (\lambda T(t) + 1)^{-1} = \\ &= -\lambda (\lambda T(t) + 1)^{-1} A_1(t) A_0(t)^{-1} (\lambda T(t) + 1)^{-1} + \\ &+ \lambda (\lambda T(t) + 1)^{-1} A_1(t) A_0(t)^{-1} A_0'(t) A_0(t)^{-1} (\lambda T(t) + 1)^{-1} = [1] + [2]. \end{aligned}$$



Risulta  $A'(t)A_0(t)^{-1}(\lambda T(t)+1)^{-1} = A_1(t)(\lambda A_1(t)+A_0(t))^{-1}$ .

e così la [1] si maggiora in norma con una costante.

D'altra parte se

$$\|A_0'(t)A_0(t)^{-1}\|_{L(L^2_{1/\sqrt{\alpha}})} < \text{cost.},$$

essendo

$$[2] = A_0'(t)A_0(t)^{-1}(\lambda T(t)+1)^{-1} - (\lambda T(t)+1)^{-1}A_0'(t)A_0(t)^{-1}(\lambda T(t)+1)^{-1},$$

si deduce che anche la norma di [2] si maggiora con una costante.

Così

$$\|[B; A_0 P(\lambda)^{-1}](B-\lambda)^{-1}\|_{V' \rightarrow V'} \leq C(1+|\lambda|)^{-1}.$$

Per applicare il Teorema 3 occorre una stima della norma di  $[B; A_0 P(\lambda)^{-1}](B-\lambda)^{-1}$  negli spazi d'interpolazione.

Una ipotesi atta allo scopo (per poter valutare, cioè, la norma di  $\frac{\partial}{\partial t}(\lambda T(t)+1)^{-1} - \frac{\partial}{\partial s}(\lambda T(s)+1)^{-1}$  in  $L^2_{1/\sqrt{\alpha}}$ ) è di assumere una regolarità superiore ai coefficienti in modo da poter stimare

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\lambda T(t)+1)^{-1}$ ; come nell'esempio precedente

Le cose sono chiaramente molto semplificate se  $A(t, x, D)$  è indipendente da  $t$ .

Torniamo ora alle considerazioni generali, osservato che il caso forse più interessante è quello di  $m=0$ .

E' allora possibile approssiare la risolubilità di (1) in un senso più debole per mezzo della teoria degli operatori potenziali astratti (YOSIDA).

Ricordo che un operatore  $T$ , densamente definito in un Banach  $V$  si dice un operatore potenziale astratto se  $T$  ha inverso (in generale, non limitato) densamente definito e  $-T^{-1}$  genera un semigrupp

po limitato.

Supposto che  $(\lambda T + 1)^{-1} \leq C$  per  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ , posto  $R_\lambda = T(\lambda T + 1)^{-1}$ ,  $R_\lambda$  soddisfa chiaramente l'equazione risolvente e  $\|\lambda R_\lambda\| \leq C$ . Ciò implica che  $R_\lambda$  è il risolvente d'un operatore  $S$  tale che  $(\lambda + S)^{-1} \leq C|\lambda|^{-1}$ .

Inoltre,  $X = \overline{R(T)} \oplus N(T)$ . Se  $\overline{R(T)} = X$ , allora  $N(T) = \{0\}$  e così  $-S = -T^{-1}$  è il generatore infinitesimale di un semigruppomorfo in  $X$ . Se  $\overline{R(T)} \neq X$ , allora si è provata che la restrizione  $T_1$  di  $T$  a  $\overline{R(T)}$  è un operatore potenziale astratto in  $\overline{R(T)}$ , valendo  $\overline{R(T)} = \overline{R(T_1)}$ .

Si noti che quel che ci interessa è  $T = A_1 A_0^{-1}$ .

Una condizione sufficiente ad assicurare che  $T$  sia un operatore potenziale astratto analitico in  $X$  è allora che  $N(A_1) \cap D(A_0) = \{0\}$  e  $\|A_0 P(\lambda)^{-1}\| \leq C$ ,  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ .

Se si lascia cadere l'assunzione  $N(A_1) \cap D(A_0) = \{0\}$  (che, d'altra parte, non è troppo restrittiva per le applicazioni concrete), si dovrà considerare il problema in  $\overline{R(T)}$ .

Se poniamo in (1)  $A_0 u = v$ , la (1) diventa

$$B T v + v = h$$

Essendo  $X = \overline{R(T)} \oplus N(T)$ , denotando con  $P$ , la proiezione su  $N(T)$ , risulta

$$B T_1 (1-P)v + P v + (1-P)v = P h + (1-P) h.$$

Assumendo che la restrizione di  $B$  a  $\overline{R(T)}$  soddisfi

$$\|(B - \lambda)^{-1} x\|_{\overline{R(T)}} \leq C(1 + |\lambda|)^{-1} \|x\|_{\overline{R(T)}}$$

(1) equivale a

$$\begin{cases} P v = P h \\ B T_1 (1-P)v + (1-P)v = (1-P)h \end{cases} \quad \text{in } \overline{R(T)}$$

e quindi

$$B w + T_1^{-1} w = (1-P)h \quad w = T_1 (1-P)v \quad (4)$$

Si tratta quindi di risolvere (4). A questo fine, richiamo il seguente risultato di Da Prato-Grisvard (th. 6.3 di [2]).

Teorema 4: Sia  $A_1 = 1$ ,  $A_0 = \Lambda$ ,  $X=Y$ . Supponiamo che siano soddisfatte I.II.III (con  $h=-1$  e quindi  $m=0$ ) e V. con  $k=0$ ,  $\beta < 0$ . Se  $D_B$  e  $D_\Lambda$  sono densi in  $X$  allora  $\exists \omega \geq 0$  tale che  $\Lambda+B$  è chiusibile ed esiste l'inverso limitato  $(\Lambda+B-\lambda)^{-1}$  per ogni  $\lambda > \omega$ .

Se  $A_1 A_0^{-1}$  è un operatore potenziale astratto in  $X$ , risulta

$$\begin{aligned} \|(T^{-1} + \lambda)^{-1}\| &= \|(T(\lambda T + 1)^{-1})\| \leq C|\lambda|^{-1}, \\ \|[B; (T^{-1} + \lambda)^{-1}](B - \lambda)^{-1}\| &= \|[B; A_1 A_0^{-1} (\lambda A_1 A_0^{-1} + 1)^{-1}](B - \lambda)^{-1}\| = \\ &= \|[B; A_1 (\lambda A_1 + A_0)^{-1}](B - \lambda)^{-1}\| < C|\lambda|^{\beta-1}. \end{aligned}$$

Ciò implica, in forza del teorema 4, che ha una unica soluzione forte l'equazione

$$(B + T^{-1} + \lambda)w = f$$

per ogni  $\lambda$  sufficientemente grande, cioè esiste un  $\omega \in X$  e  $\omega_n \in D(T^{-1})$  tali che  $\omega_n + \omega$  in  $X$ ,  $B\omega_n$ ,  $T^{-1}\omega_n$  in  $X$ ,  $f_n = (B + T^{-1} + \lambda)\omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  in  $X$ . Ciò significa che esiste  $s_n \in Y$ , tale che  $A_1 s_n + \omega$  in  $X$ ,  $(B + \lambda)A_1 s_n + A_0 s_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ .

Nelle applicazioni, la convergenza  $A_1 s_n + \omega$  ci dice che  $s$  converge in un opportuno spazio legato alla degenerazione di  $A_1$ , ad una  $s$  che possiamo definire soluzione forte del problema. Su questa falsariga si tratta anche il caso in cui  $R(T) \neq X$ .

Esempio 7: Sia  $A(t)$ ,  $0 < t < T$ , una famiglia di operatori lineari chiusi nel Banach  $E$  soddisfacente le ipotesi dell'esempio 2. Se  $\alpha_0$  è un reale positivo, consideriamo l'operatore  $A_1(t)$  definito da

$$A_1(t)u(t) = t^{\alpha_0}u(t), \quad u \in L^P(0, T; E)$$



e gli operatori  $A_0, A_1$ ,  $(A_0 u)(t) = A(t)u(t)$ ,  $u \in L^P(0, T; D)$ ,

$(A_1 u)(t) = A_1(t)u(t)$ ,  $u \in L^P(0, T; E)$ .

Si ha facilmente

$$\|\lambda A_1 (\lambda A_1 + A)^{-1}\| \leq C, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq 0$$

e così  $\|(\lambda T + 1)^{-1}\| \leq C \operatorname{Cost}$ ,  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ ,  $T = A_1 A_0^{-1}$ .

Se  $\varphi \in C_0^\infty(0, T; E)$ , anche  $\varphi t^{-\alpha_0}$  è  $C^\infty$  a supporto compatto e questi implica  $\overline{R(T)} = L^P(0, T; E) = X$

Ne segue che  $T^{-1} = t^{-\alpha_0} A(t)$  è l'opposto del generatore infinitesimale di un semigrupp o olomorfo.

Si applica quindi quanto sopra ricordato. Previo un cambiamento opportuno della variabile indipendente, esiste una unica soluzione forte di (4). Esiste cioè  $\omega \in L^P(0, T; E)$  ed esiste  $\omega_n \in R(T) = R(t^{\alpha_0} A(t))$  tale che  $\omega_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \omega$  in  $L^P(0, T; E)$ ,  $(B + T^{-1}) \omega_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  in  $L^P(0, T; E)$ .

Si noti, infatti,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} t^{\alpha_0} (\lambda t^{\alpha_0} A(t))^{-1} &= \frac{\partial}{\partial t} t^{\alpha_0} A(t)^{-1} (\lambda t^{\alpha_0} A(t)^{-1} + 1)^{-1} = \\ &= -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} (\partial t^{\alpha_0} A(t)^{-1} + 1)^{-1} = (\lambda t^{\alpha_0} A(t)^{-1} + 1)^{-1} \left\{ \frac{d}{dt} t^{\alpha_0} A(t)^{-1} \right\}. \\ (\lambda t^{\alpha_0} A(t)^{-1} + 1)^{-1} &= (\lambda t^{\alpha_0} A(t)^{-1} + 1)^{-1} \alpha_0 t^{\alpha_0-1} A(t)^{-1} (\lambda t^{\alpha_0} A(t)^{-1} + 1)^{-1} - \\ &- (\lambda t^{\alpha_0} A(t)^{-1} + 1)^{-1} t^{\alpha_0} A(t)^{-1} A'(t) A(t)^{-1} (\lambda t^{\alpha_0} A(t)^{-1} + 1)^{-1}. \end{aligned}$$

Il secondo addendo si tratta facilmente e si ottiene una maggiorazione in norma del tipo  $C|\lambda|^{-1}$ .

Per quanto riguarda il primo addendo, osservo che

$$\begin{aligned} &(\lambda t^{\alpha_0} A(t)^{-1} + 1)^{-1} (\lambda t^{\alpha_0} A(t)^{-1} + 1 - 1) (\lambda t^{\alpha_0} A(t)^{-1} + 1)^{-1} = \\ &= \alpha_0 \lambda^{-1} t^{-1} \left\{ (\lambda t^{\alpha_0} A(t)^{-1} + 1)^{-1} - (\lambda t^{\alpha_0} A(t)^{-1} + 1)^{-2} \right\} \end{aligned}$$

e quindi si ottiene una maggiorazione in norma del tipo  $C(|\lambda|t)^{-1}$ .

Si può allora utilizzare il Teorema di Hardy per stimare la norma di

$$\int_{\Gamma_{\alpha, \theta}} [B; (T^{-1} + \lambda)^{-1}] (B - \lambda)^{-1} f d\lambda$$

in  $L^p(0, T; E)$ .

Pertanto, esiste  $\omega \in L^p(0, T; E)$  ed esiste  $u_n \in D(A_0)$  tale che  $A_1 u_n \rightarrow \omega$  in  $L^p(0, T; E)$  e

$$\frac{d}{dt} t^{\alpha_0} u_n + A_0(t) u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ in } L^p(0, T; E).$$

Interpretiamo la convergenza  $A_1 u_n \rightarrow \omega$  in  $L^p(0, T; E)$ .

$$\int_0^T \left\| t^{\alpha_0} u_n(t) - \omega(t) \right\|_E^p dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

dice che  $\int_0^T \left\| t^{\alpha_0} \left\| u_n(t) - \frac{\omega(t)}{t^{\alpha_0}} \right\|_E^p dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  e quindi esiste

$u \in L^p_{t^{\alpha_0}}(0, T; E)$  tale che  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$  in  $L^p_{t^{\alpha_0}}(0, T; E)$  e

e  $\frac{d}{dt} t^{\alpha_0} u_n + A_0(t) u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  in  $L^p(0, T; E)$ .

Allo stesso modo si potrebbe riconsiderare in questa ottica l'Esempio 3, anche sotto assunzioni più generali  $m(t, x)$ , permettendo che essa si annulli all'interno di  $\Omega$  e su insiemi di misura non nulla. Naturalmente, otterremo informazioni sullo stato iniziale ( $t=0$ ) solo per quei punti in cui  $m(t, x) > 0$  (si confronti la tecnica precedente).

Ciò permette anche di fare a meno degli spazi con peso.

La soluzione verrà cercata in spazi di distribuzione, tipo  $L^2(0, T; H^{-m}(\Omega))$ . A questo proposito, vedi TREVES.